MODÈLES AR FAIBLES MODULÉS PAR UNE CHAINE DE MARKOV CACHÉE

[1] Armel Bra, [2] Rabehasaina Landy & [3] Yacouba Boubacar Maïnassara

[1] kja.bra@univ-fcomte.fr
[2] landy.rabehasaina@univ-fcomte.fr
[3] Yacouba.BoubacarMainassara@uphf.fr

[1,2] Université Bourgogne-Franche-Comté,
Laboratoire de mathématiques de Besançon,
25030 Besançon, France.
[3] Université Polytechnique Hauts-de-France,
INSA Hauts-de-France,
CERAMATHS-Laboratoire de Matériaux,
Céramiques et de Mathématiques,
F-59313 Valenciennes, France.

Résumé. Dans ce document, nous présentons les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moments pour les modèles autorégressifs (AR) intégrant des changements de régime markoviens où les erreurs sont non corrélées mais pas nécessairement indépendantes, avec l'hypothèse que les régimes ne sont pas directement observables. L'assouplissement des hypothèses concernant la non-indépendance des erreurs et la non-observabilité directe des régimes élargit significativement l'applicabilité de cette classe de modèles AR à changements de régimes. Nous donnons des conditions nécessaires pour prouver la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur des moments dans un cas particulier du modèle étudié. Une attention particulière est portée à l'estimation de la matrice de covariance asymptotique.

Mots-clés. Estimation, processus stationnaire, chaîne de Markov cachée, changement de régime, méthode des moments, consistance, normalité asymptomatique.

Abstract. In this document, we present the asymptotic properties of the moment estimator for autoregressive (AR) models incorporating Markov regime changes, where errors are uncorrelated but not necessarily independent, with the assumption that the regimes are not directly observable. Relaxing the assumptions regarding the non-independence of errors and the direct non-observability of regimes significantly broadens the applicability of this class of AR models with regime changes. We provide necessary conditions to prove the consistency and asymptotic normality of the moment estimator in a specific case of the model under study. Particular attention is paid to the estimation of the asymptotic covariance matrix.

Keywords. Estimation, stationary process, hidden Markov chain, regime switching, method of moments, consistency, asymptomatic normality.

1 Introduction

Depuis plusieurs décennies, l'analyse des séries temporelles est au centre de la recherche dans des domaines tels que l'économétrie et la finance. Les modèles ARMA, introduits par Box et Jenkins, constituent l'une des approches les plus classiques et les plus largement utilisées pour modéliser ces séries. Cependant, ces modèles conventionnels ont leurs limites, en particulier lorsqu'il s'agit de prendre en compte des changements soudains ou des transitions de régimes dans les données. (Voir par exemple Francq & Roussignol (1997)).

Dans ce document, notre attention est focalisée sur les modèles ARMA faibles modulés par une chaîne de Markov cachée. Lorsque nous parlons de modèles ARMA « faibles » , nous faisons référence à des modèles ARMA dans lesquels le bruit est non corrélé mais pas nécessairement indépendant. Le terme « caché » signifie que les états de la chaîne de Markov ne sont pas directement observables, mais qu'ils influencent néanmoins le comportement de la série temporelle. À l'inverse, nous qualifierons de modèles ARMA forts ceux pour lesquels le bruit est considéré comme indépendant et identiquement distribué (i.i.d). Ces nuances sont essentielles pour comprendre les spécificités et les défis de l'approche que nous abordons.

Malgré les complexités inhérentes à notre sujet d'étude, il est important de reconnaître les contributions significatives précédentes qui ont exploré des problématiques similaires sous des conditions plus restrictives. Nous pouvons citer entre autres Francq & Zakoıan (2001) et Francq & Gautier (2004) qui ont respectivement exploré les propriétés probabilistes et établi des conditions explicites assurant la consistance et la normalité asymptotique, ainsi que l'estimation de la matrice de variance asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, dans le cadre d'un modèle ARMA fort modulé par une chaîne de Markov observée. Poursuivant dans cette veine et sous certaines hypothèses essentielles de mélange et d'ergodicité, Boubacar Maïnassara & Rabehasaina (2020) ont étendu leurs résultats au cas des modèles ARMA faibles lorsque la chaîne de Markov est observée. Notre but est de compléter cette littérature déja riche en considérant des modèles ARMA faibles dont la chaîne de Markov est cachée.

Les applications d'un tel modèle sont vastes, de la détection des changements de régime dans les séries économiques à l'analyse des signaux biomédicaux, en passant par les prévisions financières. Les modèles ARMA faibles modulés par une chaîne de Markov cachée offrent une nouvelle perspective pour comprendre la dynamique sous-jacente des certaines séries temporelles.

2 Modèle et hypothèses

On dira qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation ARMA(p,q) faible modulé par une chaîne de Markov (δ_t) cachée si pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = -\sum_{i=1}^{p} a_i^0(\delta_t)X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j^0(\delta_t)\epsilon_{t-j} + \epsilon_t \tag{1}$$

où $\epsilon_t = f^0(\delta_t)\eta_t$ avec (η_t) un processus stationnaire centré satisfaisant $\mathbb{E}(\eta_t\eta_{t'}) = \sigma^2\mathbb{1}_{\{t=t'\}}$, (δ_t) une chaîne de Markov non observée à valeurs dans $\mathcal{E} := \{1, \cdots, K\}$, $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ et $(a^0(\delta_t))_{t\in\mathbb{Z}}, (b^0(\delta_t))_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

On désigne par θ_0 le paramètre inconnu (les vrais paramètres). Formellement

$$\theta_0 := (a_i^0(s), b_i^0(s), p^0(k,k'), f^0(s); i = 1,\dots,p, j = 1,\dots,q; k, s \in \mathcal{E}; k' = 2,\dots,K) \in$$
$$\Theta := \Bigg\{ (a_i(s), b_j(s), p(k,k'), f(s); i = 1,\dots,p, j = 1,\dots,q, k, s \in \mathcal{E}, k' = 2,\dots,K) \in$$
$$\mathbb{R}^{(p+q)K} \times [0,1]^{K(K-1)} \times \mathbb{R}^K \text{ et } \forall\, k \in \mathcal{E}, \sum_{k'=2}^{K} p(k,k') \leq 1 \Bigg\}.$$

On pose

$$D_a := \begin{pmatrix} a_1^0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_K^0 \end{pmatrix} \ , \ P' := \begin{pmatrix} p^0(1,1) & p^0(2,1) & \dots & p^0(K,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^0(1,K-1) & p^0(2,K-1) & \dots & p^0(K,K-1) \\ 1-\sum_{j=1}^{K-1} p^0(1,j) & 1-\sum_{j=1}^{K-1} p^0(2,j) & \dots & 1-\sum_{j=1}^{K-1} p^0(K,j) \end{pmatrix}$$

et on considère les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) Le processus (X_t) est un processus ergodique.

($\mathbf{H}_2$) Pour $\nu > 0$, le rayon spectral de $D_a^{4+2\nu}P'$ est strictement inférieur à 1.

($\mathbf{H}_3$) Les processus (Δ_t) et (η_t) sont indépendants.

($\mathbf{H}_4$) $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_\eta(h)^{\frac{\nu}{2+\nu}} < \infty$ et $\mathbb{E}(|\eta_t|^{4+2\nu}) < \infty$ pour un certain $\nu > 0$.

($\mathbf{H}_5$) L'intérieur $\mathring{\Theta}$ de Θ est non vide.

($\mathbf{H}_6$) Il existe un sous-ensemble compact Θ^c de Θ contenant θ_0.

Sous les hypothèses ($\mathbf{H}_2$) et ($\mathbf{H}_3$), les paramètres du modèle (1) lorsque $(p,q) = (0,1)$ satisfont pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_{k,0} := \mathbb{E}\left(X_k X_0\right) = \sigma^2 \mathbf{1}'(D_a P')^k D_a^2 P'(I - D_a^2 P')^{-1} \pi_{f^2} := \psi_k(\theta_0), \qquad (2)$$

où $\mathbf{1}' = (1, \cdots, 1)$ est un vecteur de dimension K et $\pi_{f^2} := \{f^2(1)\pi(1), \cdots, f^2(K)\pi(K)\}'$.

Un estimateur implicite de θ_0 basé sur la méthode des moments est donné par $\hat{\theta}_n$ où $\hat{\theta}_n$ est le zéro de la fonction d'estimation $F^n(\theta) := \big(\psi_1(\theta) - \hat{c}_{1,0}, \cdots, \psi_{(p+q)K}(\theta) - \hat{c}_{(p+q)K,0}\big)$.

Une attention particulière sera accordée à la fonction F^n afin de prouver les propriétés asymptotiques de $\hat{\theta}_n$.

3 Propriétés asymptotiques de l'estimateur des moments

Soient $\mathcal{F}_{-\infty}^t$ et $\mathcal{F}_{t+h}^{\infty}$ les σ-algèbres engendrés respectivement par $\{\eta_u : u \leq t\}$ et $\{\eta_u : u \geq t+h\}$. Afin de mesurer la dépendance temporelle du processus $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, nous introduisons les coefficients de mélange fort $(\alpha_\eta(h))_{h\in\mathbb{N}^\star}$ du processus stationnaire $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme suit

$$\alpha_\eta(h) := \sup_{A\in\mathcal{F}_{-\infty}^t, B\in\mathcal{F}_{t+h}^{\infty}} |P(A\cap B) - P(A)P(B)|.$$

Théorème 1. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$, *l'estimateur* $\hat{\theta}_n$ *converge presque sûrement vers* θ_0.

Théorème 2. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$ *à* $(\mathbf{H}_6)$, *nous avons*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, J^{-1}IJ^{-1}\right),$$

avec $J := J_{F^n}(\theta_0)$ *et* $I := I(\theta_0) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Var}\left(\sqrt{n}F^n(\theta_0)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Cov}(Y_t(\theta_0), Y_{t-k}(\theta_0))$,
où J_{F^n} *désigne la matrice jacobienne de la fonction* F^n *et* $Y_t(\theta_0) := \left(X_tX_{t+1}, \ldots, X_tX_{t+(p+q)K}\right)$.

Remarque : Bien que la fonction d'estimation F^n dépende de n, il est important de noter que la matrice jacobienne J_{F^n} n'est pas fonction de n. Ceci s'explique par le fait que, lors du calcul de la jacobienne de F^n, les termes en $\hat{c}_{k,0}$ sont éliminés, résultant en une expression de J_{F^n} indépendante de n.

4 Estimation de la matrice de variance asymptomatique

Cette section vise à proposer un estimateur consistant pour la matrice de variance-covariance $\Omega := J^{-1}IJ^{-1}$ obtenue précédemment.Un estimateur simple pour la matrice J dans le contexte de notre étude est donné par

$$\hat{J}_n := J_{F^n}(\hat{\theta}_n).$$

Pour estimer la matrice I, nous adopterons la méthode d'estimation paramétrique de la densité spectrale, telle qu'introduite par Berk (1974). Considérons $\hat{\varphi}_r(z)$ défini par $I_{(p+q)K} + \sum_{i=1}^r \hat{\varphi}_{r,i} z^i$, où les $\hat{\varphi}_{r,1}, \ldots, \hat{\varphi}_{r,r}$ représentent les coefficients obtenus par régression des moindres carrés de $\mathcal{Y}_t$ sur ses r retards, soit $\mathcal{Y}_{t-1}, \ldots, \mathcal{Y}_{t-r}$ avec $\mathcal{Y}_t := Y_t(\theta_0) - \mathbb{E}[Y_t(\theta_0)]$. La variance empirique de ces résidus est notée $\hat{\Sigma}_{\hat{u}_r}$.

Théorème 3. *Supposons que les conditions du Théorème 2 soient satisfaites. De plus, admettons que* $\mathbb{E}|\eta_t|^{8+4\nu} < \infty$ *pour un certain* $\nu > 0$, *que la matrice* Σ_u *soit inversible, et que la suite* $(\mathcal{Y}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *admet une représentation* $AR(\infty)$. *On suppose de plus que* $\|\varphi_i\| = o(i^{-2})$ *lorsque* $i \to \infty$, *et que les racines de* $\det(\boldsymbol{\varphi}) = 0$ *se situent en dehors du disque unité. Dans ces conditions, l'estimateur spectral pour la matrice* $\hat{I}^{SP}$, *défini par*

$$\hat{I}^{SP} := \hat{\boldsymbol{\varphi}}(1)^{-1}\hat{\Sigma}_{\hat{u}_r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(1)^{-1},$$

converge en probabilité vers I *lorsque* $r = r(n) \to \infty$ *et* $r = o(n^{-1/3})$. *Par conséquent, un estimateur consistant de* Ω *est donné par*

$$\hat{\Omega} := \hat{J}_n^{-1}\hat{I}^{SP}\hat{J}_n^{-1}.$$

Références

Berk, Kenneth N. 1974. Consistent autoregressive spectral estimates. *The Annals of Statistics*, 489–502.

Boubacar Maïnassara, Yacouba, & Rabehasaina, Landy. 2020. Estimation of weak ARMA models with regime changes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **23**, 1–52.

Francq, Christian, & Gautier, Antony. 2004. Estimation of time-varying ARMA models with Markovian changes in regime. *Statistics & probability letters*, **70**(4), 243–251.

Francq, Christian, & Roussignol, Michel. 1997. On white noises driven by hidden Markov chains. *Journal of Time Series Analysis*, **18**(6), 553–578.

Francq, Christian, & Zakoıan, J-M. 2001. Stationarity of multivariate Markov–switching ARMA models. *Journal of Econometrics*, **102**(2), 339–364.