Modélisation et prévision des flux de patients dans les services d'urgence de la région Grand-Est

Laurie Sapia

Laboratoire de Mathématiques de Reims (LMR), UMR CNRS 9008, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, laurie.sapia@univ-reims.fr

Résumé. Les tensions hospitalières dans les services accueil d'urgence (SAU) français se sont accentuées ces dernières années et sont largement médiatisées. Des facteurs d'ordres organisationnel, structurel ou conjoncturel peuvent expliquer cette situation et incitent à une compréhension et une anticipation des flux de passage dans les SAUs. La modélisation des flux de passage dans les services hospitaliers, y compris les SAUs, a fait l'objet de nombreuses publications ces dernières années, en France et à l'international. Dans le présent document, nous proposons un modèle additif généralisé des flux journaliers, incorporant des informations exogènes (tels que les périodes de vacances scolaires, la proximité d'événements populaires), dans lequel la tendance est une fonction polynomiale et la saisonnalité est une combinaison d'harmoniques. Ce modèle est ajusté individuellement pour chaque SAU du Grand Est à partir des séries des passages fournies par l'association Est-RESCUE. Les performances de prévision des flux sont évaluées puis comparées aux modèles SARIMA, constituant la référence communément utilisée dans la littérature.

Mots-clés. Flux de patients des services d'urgence, modèle SARIMA, modèle additif généralisé, séries temporelles, prédiction.

Abstract. Hospital tensions in the French emergency departments (ED) have increased and are widely publicized. Organizational, structural or cyclical factors can explain this situation and encourage an understanding and anticipation of the flows of patients in the EDs. The modeling of the flow of passage in hospital departments, including EDs, has been the subject of numerous publications in recent years, in France and internationally. In this paper, we propose a generalized additive model of daily flows incorporating exogenous information (such as school holiday periods, proximity to popular events) in which trend is a polynomial function and seasonality is a combination of harmonics. This model is adjusted individually for each ED of the French Grand Est area from the series of passages provided by the association Est-RESCUE. The flow prediction performances are evaluated and compared to the SARIMA models, which are the reference commonly used in the literature.

Keywords. Emergency departments' patients flow, SARIMA model, Generalized additive model, time-series, forecasting.

1 Introduction

Par définition, la tension hospitalière est une situation exceptionnelle qui se produit lorsqu'il y a un déséquilibre entre les moyens disponibles de la structure hospitalière et le flux de patients dans ses services. Les SAUs sont particulièrement concernés, comme illustré lors de la pandémie de Covid-19 puis ensuite par les restrictions d'accès à certains services pendant les périodes contraintes, comme lors des congés estivaux. La surpopulation dans les SAUs et ses conséquences sanitaires, sociales ou financières ont fait l'objet de nombreuses études, dans plusieurs pays ; voir par exemple [5], [3], [8], [14], [10], [15].

Ce phénomène peut être expliqué par divers facteurs. Certaines sont d'ordre conjoncturel, comme les vagues d'épidémie saisonnières qui engendrent un afflux de patients important sur de courtes périodes. D'autres sont d'ordre organisationnel, les SAUs ayant dû s'adapter à l'évolution réglementaire et ont fait face à des pénuries de ressources matérielles et humaines de plus en plus marquées. Enfin, des facteurs structurels, comme le vieillissement de la population, entraînant l'augmentation de l'afflux de personnes âgées, dont la prise en charge est notoirement plus complexe ; voir par exemple [11].

Dans ce contexte, la prévision des flux de patients dans les SAUs permet d'anticiper et d'optimiser les ressources à déployer. Une littérature abondante existe sur le sujet, dont on peut trouver une revue dans [6] et [7]. Les modèles ARMA/SARIMA ont été employés pour la modélisation des flux de patients dès 1988 [12], notamment pour les SAUs des hôpitaux de Lille [9], puis de Troyes [1]. Ils constituent encore aujourd'hui la référence auxquels les autres modèles sont comparés. L'utilisation de nombreux autres modèles a de fait été explorée, par exemple : [13] utilise des réseaux de neurones récurrents ; [2] utilise un lissage exponentiel automatisé pour une prédiction mensuelle des passages.

En France, un réseau d'observatoires régionaux des urgences (ORU) maille le territoire ; les ORUs ont pour mission « la collecte, l'analyse et le partage des données du périmètre des urgences et des soins de premier recours d'une région et disposant en son sein d'une expertise de médecine d'urgence ». Ils fournissent aux Agences Régionales de Santé puis aux établissements des rétrospectives chiffrées de l'activité des SAUs, entre autres missions. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur les résumés de passage aux urgences (RPU), synthèse administrative standardisée de la prise en charge de chaque patient se présentant dans un SAU, dont la remontée vers les ORUs est systématisée.

Dans ce travail, nous proposons un modèle additif généralisé (MAG) pour les flux de passage quotidiens dans les SAUs de la région Grand Est. Notre modèle incorpore des composantes de tendance et de saisonnalité, ainsi qu'une composante événementielle permettant de capturer l'influence des périodes de vacances ou d'événements ponctuels. L'approche addivite offre, en comparaison d'un classique modèle SARIMAX, une grande souplesse sur la forme de chaque composante. Plus précisément, nous considérons ici une tendance polynomiale et une saisonnalité construite comme la superposition des oscillations de plus grandes harmoniques associées aux données d'ajustement. Ce modèle est ajusté individuellement à chaque SAU sur la base de la série temporelle des passages quotidiens dans ce SAU sur une période de trois ans, de 2016 à 2018. Ces séries sont fournies par l'association Est-RESCUE, ORU attachée à la région Grand Est, dans le cadre d'un partenariat de recherche avec l'Université de Reims

Champagne-Ardenne, après agrégation à l'échelle journalière des RPUs.

La suite du document est structuré comme suit. La description formelle de notre MAG est présentée dans la partie 2. La procédure de sélection de modèle et d'ajustement univariée à chaque SAU est explicitée dans la partie 3. Enfin, les performances de prévision du MAG sont comparées à celles du modèle SARIMA dans la partie 4.

2 Modélisation des flux dans les SAUs

Introduisons les notations qui seront utilisées tout au long du document. L'ensemble des SAUs du Grand Est est noté $\mathcal{D}$. Nous désignons génériquement par d tout élément de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire tout SAU. Pour tout SAU d, la série temporelle des nombres quotidiens de patients pris en charge par le service au cours d'une période fixe de $\mathbb{T}$ jours, $\mathbb{T}$ étant un nombre entier positif, est notée $(x^{(d)}_{1:\mathbb{T}}) = (x^{(d)}_t)_{t\in\{1,\ldots,\mathbb{T}\}}$. Nous supposons implicitement que le jour $t = 1$ correspond au 1er janvier 2016, la première date avec des enregistrements disponibles dans notre ensemble de données. Les enregistrements disponibles s'arrêtent le 31 octobre 2018, ce qui correspond à $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\max} := 1015$ jours. Nous supposons que, pour tout $d \in \mathcal{D}$, la séquence $(x^{(d)}_{1:\mathbb{T}})$ correspond aux premières valeurs de la réalisation d'un processus stochastique $\mathbf{X^{(d)}} = (X^{(d)}_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire,

$$x^{(d)}_t = X^{(d)}_t(\omega), \quad t = 1, \ldots, \mathbb{T},$$

où $\omega \in \Omega$. Ainsi, par modélisation des flux de patients, nous entendons proposer une description quantifiée du comportement stochastique des processus $\mathbf{X^{(d)}}$, $d \in \mathcal{D}$. Lorsqu'aucune attention particulière n'est accordée à un département donné, nous supprimons l'exposant $^{(d)}$ dans les notations précédentes. Par conséquent, $(x_t)_{t\in\{1,\ldots,\mathbb{T}\}}$ désignera la série des nombres quotidiens de patients dans un service générique non spécifié. Nous considérerons souvent des sous-séries de $(x_t)_{t\in\{1,\ldots,\mathbb{T}\}}$ ou $(X_t)_{t\in N^*}$. En particulier, pour tout $t_1, t_2 \in \{1, ..., \mathbb{T}_{max}\}$, $t_1 < t_2$, nous notons $x_{t_1:t_2} := (x_{t_1}, x_{t_1+1}, \ldots, x_{t_2-1}, x_{t_2})$ la série des valeurs successives de x_t entre t_1 et t_2.

Nous proposons ici un modèle additif généralisé – désigné par THSR dans la suite, en référence aux quatre composantes dont il est la somme – avec tendance polynomiale et saisonnalité harmonique. Il est défini comme la superposition de quatre processus. Précisément, nous supposons

$$X_t = T_t + H_t + S_t + R_t + \epsilon_t, \tag{1}$$

où

— $T = (T_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ modélise la tendance à moyen et long terme du processus par une fonction polynomiale de t. Précisément, étant donnés $P_0(t) = 1$, $P_1(t), \ldots, P_K(t)$, $K + 1$ polynômes orthogonaux de degrés croissants $0, 1, \ldots, K$, nous supposons que

$$T_t = T^{(K)}_t(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{K} a_k\, P_k(t), \quad t \in \mathbb{N}^*,$$

où $K \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \ldots, a_K) \in \mathbb{R}^{K+1}$ sont des paramètres numériques ;

— $H = (H_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ modélise les effets locaux (dans le temps) des événements à des dates spécifiques, telles que les vacances et jours fériés, le jour de Noël, les célébrations nationales, etc. Nous avons divisé les dates spécifiques en deux parties : celles qui sont communes à tous les services d'urgence du Grand Est d'une part, et celles qui sont spécifiques à chaque service d'autre part. Précisément, pour chaque $d \in \mathcal{D}$,

$$H_t = H_t^{(d)}(\mathbf{b}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} b_i \mathbb{1}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{S}^{(d)}} b_j \mathbb{1}_j(t), \quad t \in \mathbb{N}^*,$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des dates communes à tous les SAUs, par exemple les jours de vacances scolaires, jours fériés, etc. $\mathcal{S}^{(d)}$ désigne l'ensemble des dates spécifiques au SAU d, par exemple les événements sportifs ou culturels massifs, $\mathbb{1}_i(\cdot)$ est la fonction indicatrice de i, c'est-à-dire, $\mathbb{1}_i(t) = 1$ si $t \in \{i\}$ et 0 sinon, et b_i, b_j sont des paramètres réels à estimer. Les coefficients b_i peuvent être constants sur une certaine période, par exemple, constants sur une période de jours fériés ou des périodes de jours fériés similaires (comme les jours fériés d'automne, avec une période de deux semaines chaque année à la fin du mois d'octobre). Les dates regroupées dans une cellule ont la même valeur de paramètre b_i ;

— $S = (S_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ modélise le comportement saisonnier du processus. Nous supposons que cette composante saisonnière est une superposition de fonctions harmoniques. Précisément,

$$S_t = S_t(\mathcal{F}_m, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{f \in \mathcal{F}_m} \left(c_f \cos(2\pi f\, t) + d_f \sin(2\pi f\, t) \right), \quad t = 1, \ldots, T,$$

où $\mathcal{F}_m$ est un sous-ensemble constitué de m fréquences bien choisies parmi l'ensemble des fréquences $\left\{ \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \ldots, \frac{\lfloor (T-1)/2 \rfloor}{T} \right\}$, et c_f et d_f, $f \in \mathcal{F}_m$, sont des paramètres réels ;

— $R = (R_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est un processus stochastique de type $ARMA(p, q)$ avec des hyperparamètres p et q choisis parmi les valeurs $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

— $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est un bruit blanc représentant le terme résiduel.

Rappelons que les modèles doivent être sélectionnés et ajustés, de manière séparée, à partir de la séquence des flux de chaque SAU.

En résumé, la famille des modèles THSR dépend des hyperparamètres $K \in \mathbb{N}^*$, le degré maximal de la fonction polynomiale qui modélise la tendance à moyen et long terme, $n_{\mathcal{C}}$ le nombre de périodes de jours fériés, $n_{\mathcal{S}}$ le nombre d'événements spécifiquement liés à chaque SAU, $\mathcal{F}_m$ le sous-ensemble d'harmoniques à conserver dans la partie saisonnière, et (p, q) les hyperparamètres de la composante ARMA R_t. Les paramètres des modèles sont $\mathbf{a} := a_{0:K} \in \mathbb{R}^{K+1}$ les coefficients de la tendance polynomiale, $\mathbf{b} := b_{1:(n_{\mathcal{C}}+n_{\mathcal{S}})} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{C}}+n_{\mathcal{S}}}$ les effets des jours fériés et des événements spécifiques, $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) := (c_{1:m}, d_{1:m}) \in \mathbb{R}^{2m}$ les amplitudes des effets périodiques, et $\phi \in \mathbb{R}^{p+1}, \theta \in \mathbb{R}^{q+1}$ les paramètres du modèle $ARMA(p, q)$.

Dans la partie 4, les performances en prévision du modèle THSR seront comparées à celles d'un modèle SARIMA. La famille des modèles SARIMA est d'usage commun dans de nombreux domaines d'étude de séries temporelles. On ne rappelle pas ici la définition formelle de ces modèles (dont on pourra trouver un exposé rigoureux et complet, par exemple, dans [4]).

Retenons simplement que les modèles SARIMA dépendent d'un ensemble de sept hyperparamètres entiers p,d,q,P,D,Q,s, souvent notés $(p, d, q)(P, D, Q)_s$, où s représente la période de saisonnalité du modèle, qui sera fixée à $s = 7$ dans le cas présent. Ici, nous restreignons $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $d, D \in \{0, 1\}$ et $P, Q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Les avantages et potentielles limites des THSR relativement aux SARIMA sont identifiées dans le tableau 1.

THSR	SARIMA
• Prise en compte d'événements exogènes • Flexibilité sur la forme des tendances à moyen et long terme permettant d'intégrer les connaissances d'experts. • Modélisation simple de la saisonnalité multiple. • Paramètres faciles à interpréter	• Effet saisonnier évolue dans le temps. • C'est un modèle classique, qui peut être facilement reproduit dans d'autres langages de programmation.

Table 1 – Caractéristiques formelles distinguant les modèles THSR et SARIMA.

3 Sélection de modèles, estimation des paramètres et prévisions

Le processus d'ajustement des modèles SARIMA et THSR aux flux de patients dans un SAU se déroule en deux étapes : premièrement, pour chaque valeur possible des hyperparamètres, les paramètres du modèle sont estimés à partir d'un ensemble d'entraînement de données. Ensuite, dans l'étape de sélection de modèle, le choix « optimal » des hyperparamètres est retenu. La définition de « optimal » dépend de la famille de modèles considérée. Deux types de critères sont pris en compte : a) la minimisation d'une fonction de coût comprenant un terme de pénalité croissant avec le nombre de paramètres du modèle (typiquement, l'opposé de la log-vraisemblance avec une pénalité AIC ou BIC), et b) la maximisation de la performance prévisionnelle estimée par une procédure de type validation croisée, basée sur des métriques de performance. Cette procédure en deux étapes est coûteuse en termes de calcul et nécessite de restreindre les valeurs possibles des hyperparamètres des modèles à un petit ensemble fini de valeurs. La méthode de sélection de modèle utilisée pour chaque famille est également identifiée ; ces méthodes de sélection de modèles sont explicitement décrites dans les sections 3.1 et 3.2. Pour évaluer la performance de prévision d'un modèle donné, à horizon de h jours, nous utilisons le critère de l'erreur absolue moyenne pondérée WMAPE (Weighted Mean Absolute Percentage Error), exprimée en pourcentage, WMAPE $= \frac{\sum_{i=n+1}^{n+h} |\widehat{y}_i - y_i|}{\sum_{i=n+1}^{n+h} |y_i|} * 100$, où $(y_i)_{i=n+1,n+h}$ sont les valeurs observées de la série temporelle de test et $(\hat{y}_i)_{i=n+1,n+h}$ sont les valeurs prédites par le modèle considéré, n étant la taille de la série d'apprentissage.

3.1 Sélection de modèles SARIMA

Pour la sélection de modèle SARIMA, nous utilisons le critère classique BIC. Pour toute valeur des hyperparamètres $(p, d, q)(P, D, Q)_s$, le critère BIC du modèle SARIMA associé est calculé à partir de la séquence d'apprentissage $(x_{1:T_{train}})$, avec $T_{train} = 1008$. Le modèle ayant la valeur BIC minimale est alors retenu. Nous avons considéré pour les hyperparamètres des modèles SARIMA les valeurs $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $d, D \in \{0, 1\}$, $P, Q \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $s = 7$. Il est à noter que cette procédure de sélection de modèle, appliquée aux 59 services d'urgence du Grand Est, est chronophage. Les calculs ont été effectués via une procédure parallélisée en mémoire partagée sur un seul processeur avec 28 cœurs du centre régional de calcul intensif ROMEO [1], de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, nécessitant un temps de calcul d'environ 15 heures.

3.2 Procédure de validation croisée séquentielle pour la sélection de modèles THSR

Pour estimer l'erreur de prévision théorique, à horizon de 7 jours, d'un modèle THSR (1) donné, nous proposons la méthode suivante de type validation croisée, bien adaptée au présent contexte de données temporelles, que nous appellerons validation croisée séquentielle (VCS). Contrairement aux méthodes de validation croisée classiques pour des données i.i.d, la méthode proposée prend en compte la dépendance temporelle et l'aspect séquentiel des données. Le modèle THSR ayant l'erreur de prévision estimée la plus faible sera alors choisi. Précisément, nous procédons de la manière suivante. La séquence $x_{1:\mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = 1015$, est utilisée pour générer 25 couples $(z_{j,t}^{\text{train}}, z_{j,t}^{\text{test}})$, $j = 1, \ldots, 25$, de sous-séquences d'entraînement et de test. Plus précisément, nous fixons $T = 840$ et extrayons séquentiellement des sous-séquences de longueur T de $x_{1:\mathbb{T}}$ en avançant de 7 jours, afin de définir

$$z_{j,1:T}^{\text{train}} = x_{1+7(j-1):T+7(j-1)}, \quad z_{j,T+1:T+7}^{\text{test}} = x_{T+7(j-1)+1:T+7j}, \quad j = 1, \ldots 25.$$

Nous avons choisi $T = 840$ pour deux raisons :

— cela permet de construire un nombre significatif $((\mathbb{T} - T)/7 = (1015 - 840)/7 = 25)$ de périodes de test de 7 jours pour évaluer la performance des modèles en matière de prévision à J+7 (en calculant la moyenne des mesures de performance sur les 25 périodes) ;

— $T = 840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ possède de nombreux diviseurs, notamment 2, 3, 4, 5, 7, 8, de sorte que la transformée de Fourier rapide (FFT) soit rapide en terme de temps de calcul et couvre notamment les effets saisonniers avec des périodes à valeurs entières (en particulier la période hebdomadaire 7 et ses multiples).

Dans le paragraphe suivant, nous décrivons la méthode de sélection des hyperparamètres des modèles THSR. Elle est constituée de trois étapes imbriquées consistant à choisir successivement les hyperparamètres de chaque composante additive (tendance, saisonnalité, ARMA),

1. ROMEO est constitué de 117 serveurs équipés de processeurs Intel® Skylake 6132 cadencés à 2,6 GHz pour un total de 3276 coeurs, de 280 accélérateurs Nvidia P100 SXM2 interconnectées par la technologie NVlink et de mémoire DDR4 à 2667 MT/s pour capacité mémoire distribuée de 15,3 To.

en tenant compte des résultats de l'étape précédente et en ajustant au passage le choix des hyperparamètres pour les résidus de l'étape précédente :

1. Choix de K : Pour toute période $j = 1, \ldots, 25$, en tenant compte des variables exogènes $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$, pour tout degré du polynôme $K = 0, 1, \ldots, K_{max}$, avec $K_{max} = 10$, nous estimons par la méthode des moindres carrées les paramètres du modèle additif $T_t^{(K)} + H_t$, à partir de la séquence d'apprentissage $(z_{j,t}^{\text{train}})_{t=1,\ldots,T}$, comme suit

$$(\widehat{\mathbf{a}}^{(j)}, \widehat{\mathbf{b}}^{(j)}) := \arg\min_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \sum_{t=1}^{T} \left(z_{j,t}^{\text{train}} - \sum_{k=0}^{K} a_k P_k(t) - \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{S}} b_i \delta_i(t) \right)^2 .$$

   Les valeurs prédites à J+7, selon ce dernier modèle, s'écrivent

$$\widehat{z}_{j,t}^{(K)} = T_t^{(K)}(\widehat{a}_{0:K}^{(j)}) + H_t(\widehat{\mathbf{b}}^{(j)}), \quad t = T+1, \ldots, T+7.$$

   L'erreur de prévision correspondante est donc estimée par

$$\mathcal{E}_1(K) = \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} \frac{\sum_{t=T+1}^{T+7} |\widehat{z}_{j,t}^{(K)} - z_{j,t}^{\text{test}}|}{\sum_{t=T+1}^{T+7} |z_{j,t}^{\text{test}}|}.$$

   Le choix optimal du degré K est défini alors comme suit

$$\widehat{K} := \arg\min_{K} \mathcal{E}_1(K).$$

2. Sélection des hyperparamètres de la composante S_t : la sélection des hyperparamètres de cette composante, comme l'estimation de ces paramètres, se fera à partir des résidus d'ajustement, notés y_t, de la séquence x_t, par le modèle de tendance sélectionné à l'étape précédente, i.e.,

$$y_t = x_t - T_t^{(\widehat{K})}(\widehat{\mathbf{a}}^{(j)}) - H_t(\widehat{\mathbf{b}}^{(j)}), \quad t = 1, \ldots, T.$$

   Pour toute période $j = 1, \ldots, 25$, on calcule la transformée de Fourier discrète de la séquence

$$z_{j,1:T}^{\text{train}} = y_{1+7(j-1):T+7(j-1)}, \quad T = 840,$$

   i.e.,

$$h^{(j)}(k/T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} z_{j,t}^{\text{train}} \exp\left(-i2\pi \frac{k}{T}(t-1)\right), \quad k = 0, \ldots, T-1.$$

   Nous calculons ensuite le spectre moyen, sur les 25 périodes, à chaque fréquence k/T, $k = 1, \ldots, \lfloor (T-1)/2 \rfloor = \lfloor 839/2 \rfloor = 419$, i.e., $h(k/T) = \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} h^{(j)}(k/T)$, $k = 1, \ldots, 419$. L'ensemble des fréquences seront ordonnées suivant leur niveau d'énergie (dans l'ordre décroissant) $|h(k/T)|$, $k = 1, \ldots, 419$. Notons alors $f_1, \ldots, f_m$, les fréquences ordonnées, et $\mathcal{F}_m := \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m = 1, \ldots, M$, la suite croissante d'ensembles de fréquences. Ceci permet de construire des modèles croissants pour la composante saisonnière S_t :

$$S_t = S_t(m, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{m} \left(c_i \cos(2\pi f_i\, t) + d_i \sin(2\pi f_i\, t)\right), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Le problème se ramène alors à la sélection du nombre optimal d'harmoniques m, $m = 1, \ldots, M = 40$. Pour tout $m = 1, \ldots, M$, et pour toute période $j = 1, \ldots, 25$, on estime les paramètres $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_m)$ et $\mathbf{d} := (d_1, \ldots, d_m)$ par moindres carrés, i.e.,

$$(\widehat{\mathbf{c}}^{(j)}, \widehat{\mathbf{d}}^{(j)}) := \arg\min_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \sum_{t=1}^{T} (z_{j,t}^{\text{train}} - \sum_{i=1}^{m} (c_i \cos(2\pi f_i t) + d_i \sin(2\pi f_i t)))^2.$$

Les valeurs prédites à J+7, selon ce modèle, sont données par

$$\widehat{z}_{j,t}^{(m)} = S_t(m, \widehat{\mathbf{c}}^{(j)}, \widehat{\mathbf{d}}^{(j)}), \quad t = T+1, \ldots, T+7.$$

L'erreur de prévision de ce modèle, à m harmoniques, est estimée, en prenant la moyenne sur les 25 périodes, comme suit

$$\mathcal{E}_2(m) := \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} \frac{\sum_{t=T+1}^{T+7} |\widehat{z}_{j,t}^{(m)} - z_{j,t}^{\text{test}}|}{\sum_{t=T+1}^{T+7} |z_{j,t}^{\text{test}}|}.$$

Enfin, le choix optimal du nombre d'harmonique m est défini par

$$\widehat{m} := \arg\min_{m} \mathcal{E}_2(m).$$

3. Choix de modèle ARMA(p,q) : Nous utilisons le critère BIC pour calibrer un modèle $ARMA(p,q), p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ à partir des séquences résiduelles

$$x_t - \left(T_t^{(\widehat{K})}(\widehat{\mathbf{a}}) + H_t(\widehat{\mathbf{b}}) + S_t(\widehat{m}, \widehat{\mathbf{c}}, \widehat{\mathbf{d}}) \right), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Le modèle THSR retenu s'écrit alors

$$X_t = T_t^{(\widehat{K})}(\widehat{\mathbf{a}}) + H_t(\widehat{\mathbf{b}}) + S_t(\widehat{m}, \widehat{\mathbf{c}}, \widehat{\mathbf{d}}) + R_t(\widehat{\phi}, \widehat{\theta}), \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2}$$

Le tableau 2 présente les hyperparamètres retenus pour les modèles THSR des sept SAUs de la Marne (la présentation des résultats a été limitée à ces derniers par souci de concision). En

SAU	Chalons	Epernay	Vitry	Reims-ad.	Reims-ped.	Courlancy	Reims-B.
$\widehat{K}$	3	1	1	1	1	3	4
$\widehat{m}$	4	2	11	10	11	6	29
(p,q)	(3,0)	(3,1)	(1,1)	(1,1)	(3,0)	(1,0)	(0,0)

Table 2 – Les hyperparamètres retenus lors de la procédure de sélection du modèle THSR par validation croisée séquentielle pour les sept SAUs de la Marne ($\widehat{K}$: degré du polynôme modélisant la tendance, $\widehat{m}$: nombre d'harmoniques, (p,q) : les hyperparamètres de l'ARMA)

regardant ce tableau, et de manière plus large tous les SAUs que nous avons à disposition, nous pouvons remarquer que la tendance est modélisée par un polynôme de degrés 1 ou 3, et dans plus de la moitié des SAUs, le polynôme de degrés 1 suffit. Concernant les harmoniques sélectionnées, on remarque des similitudes entre les SAUs. En effet, la saisonnalité 7 et ses multiples sont présents systématiquement, par exemple $7 * \frac{1}{2}$, $7 * \frac{1}{3}$, $7 * 30$, ... Les SAUs pour lesquels le nombre d'harmoniques retenues est important se distinguent des autres par la présence d'oscillations de basses fréquences. Enfin, les paramètres du modèles ARMA sont assez proches, $p = 1$ ou $p = 3$ et $q = 0$ ou $q = 1$, ce qui signifie qu'il n'y a plus beaucoup à modéliser ; dans certains cas, le terme résiduel R_t est négligeable et peut être assimilé à un bruit blanc (e.g. SAU de Reims-Bezannes).

4 Comparaison des performances de prédictions

En reprenant les même SAUs que précédemment, nous résumons dans le tableau 3 les erreurs de prédictions estimées et les écarts-types des estimations, du modèle THSR ainsi que du modèle SARIMA. En général, le modèle SARIMA a une erreur de prédiction légèrement supérieure à celle du modèle THSR, ce qui s'illustre bien en faisant la moyenne sur les quelques SAUs sélectionnés. Nous obtenons 12.5% pour le modèle SARIMA et 12.1% pour le modèle THSR. Le terme "WMAPE moyenne" correspond à la moyenne sur les 25 fenêtres glissantes et le terme "WMAPE écart-type" désigne l'écart-type empirique des estimations correspondant aux 25 fenêtres glissantes. Concernant les écarts-types, nous remarquons qu'en moyenne sur tous les SAUs, la différence est très légère entre les 2 modèles. En effet, la moyenne sur tous les SAUs est de 3.58 pour les modèles THSR et de 3.63 pour le modèle SARIMA.

	SAU	Chalons	Epernay	Vitry	Reims-ad.	Reims-ped.	Courlancy	Reims-B.
THSR	WMAPE moy	10.1	11.3	**13.3**	**6.8**	**11.0**	**15.3**	**16.6**
	WMAPE ecart-t.	3.4	4.1	**5**	**1.6**	**3.1**	**4.9**	7.9
SARIMA	WMAPE moy	**10**	**11.2**	14.3	7.4	12.2	15.9	16.7
	WMAPE écart-t.	**2.9**	**3.8**	5.2	1.8	4.1	6.4	**7.4**

Table 3 – Comparaison des deux modèles THSR et SARIMA

Le tableau 4 présente les erreurs de prédictions estimées ainsi que les écarts-types empiriques des estimations associées au modèle THSR, en identifiant l'apport de chaque nouvelle composante du modèle, pour les mêmes SAUs que précédemment. Le modèle "Naïf" consiste à prédire systématiquement le nombre moyen de passages journaliers observés sur la période d'apprentissage, le terme "TH" désigne la modélisation uniquement par la tendance et les variables exogènes, "THS" ajoute au modèle précédent la composante saisonnière, enfin le terme "THSR" désigne le modèle complet proposé. Nous observons que l'erreur de prévision décroît à chaque fois que l'on ajoute une nouvelle composante au modèle précédent. Par exemple, en faisant la moyenne sur tous les SAUs disponibles, l'erreur de prévision passe de 11.8 à 11 puis à 10.9. Cependant, nous pouvons noter que l'ajout de la modélisation des résidus par l'ARMA n'améliore pas toujours le modèle. Nous observons également le même phénomène pour l'écart-type moyen qui passe de 3.89 à 3.69 puis à 3.58.

	SAU	Chalons	Epernay	Vitry	Reims-ad.	Reims-ped.	Courlancy	Reims-B.
Naïve	WMAPE moy	16.31	15.94	20.69	10.9	16.24	19.68	20.6
	WMAPE ecart-t.	8.55	7.91	8.53	3.22	7.03	7.19	8.47
TH	WMAPE moy	10.37	12.04	14.01	7.9	12.07	16.7	17.63
	WMAPE ecart-t.	3.67	4.54	4.27	1.91	4.45	6.05	8.7
THS	WMAPE moy	10.03	11.74	13.22	6.86	11.17	15.37	16.63
	WMAPE ecart-t.	3.44	4.57	5.1	1.63	3.3	4.82	7.91
THSR	WMAPE moy	10.09	11.31	13.3	6.79	11.01	15.28	16.63
	WMAPE ecart-t.	3.4	4.1	5.02	1.58	3.09	4.89	7.91

Table 4 – Comparaison des modèles imbriqués du modèle naîf au modèle THSR à 3 composantes

Références

[1] Mohamed Afilal, Farouk Yalaoui, Frédéric Dugardin, Lionel Amodeo, David Laplanche, and Philippe Blua. Forecasting the Emergency Department Patients Flow. *Journal of Medical Systems*, 40(7) :175, June 2016.

[2] Jochen Bergs, Philippe Heerinckx, Benoît Depaire, and Sandra Verelst. Knowing what to expect, forecasting monthly emergency department visits : A time-series analysis. *International Emergency Nursing*, 2014.

[3] Adrian Boyle, Adrian Boyle, Kathleen Beniuk, Ian Higginson, Paul Atkinson, and Paul Atkinson. Emergency department crowding : Time for interventions and policy evaluations. *Emergency Medicine International*, 2012.

[4] Peter J Brockwell and Richard A Davis. *Time series : theory and methods*. Springer science & business media, 1991.

[5] Mathew Foley, Nizar Kifaieh, and William K. Mallon. Financial impact of emergency department crowding. *Western Journal of Emergency Medicine*, 2011.

[6] Jan G. De Gooijer, Panos M. Pardalos, and Rob J. Hyndman. 25 years of time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 2006.

[7] Muhammet Gul and Erkan Celik. An exhaustive review and analysis on applications of statistical forecasting in hospital emergency departments. *Health Systems*, 2018.

[8] Esther Hing and Farida Bhuiya. Wait time for treatment in hospital emergency departments : 2009, June 2019.

[9] Farid Kadri, Sondès Chaabane, Fouzi Harrou, and Christian Tahon. Modélisation et prévision des flux quotidiens des patients aux urgences hospitalières en utilisant l'analyse de séries chronologiques. In *7ème conférence de Gestion et Ingénierie des Systèmes Hospitaliers (GISEH)*, pages 1–8, Liège, Belgium, July 2014.

[10] Li Luo, Yong Luo, Yang You, Yuanjun Cheng, Yingkang Shi, and Renrong Gong. A mip model for rolling horizon surgery scheduling. *Journal of Medical Systems*, 2016.

[11] Bozena Mielczarek. Estimating future demand for hospital emergency services at the regional level. *null*, null.

[12] P. C. Milner. Forecasting the demand on accident and emergency departments in health districts in the trent region. *Statistics in Medicine*, 1988.

[13] Carlos Narciso Rocha and Fátima Rodrigues. Forecasting emergency department admissions. *Journal of Intelligent Information Systems*, 56(3) :509–528, June 2021.

[14] Benjamin C. Sun, Renee Y. Hsia, Robert E. Weiss, David S. Zingmond, Li-Jung Liang, Weijuan Han, Heather McCreath, and Steven M. Asch. Effect of emergency department crowding on outcomes of admitted patients. *Annals of Emergency Medicine*, 2013.

[15] Denny Yu, Renaldo C. Blocker, Mustafa Y. Sir, M. Susan Hallbeck, M. Susan Hallbeck, Thomas R. Hellmich, Tara N. Cohen, David M. Nestler, and Kalyan S. Pasupathy. Intelligent emergency department : Validation of sociometers to study workload. *Journal of Medical Systems*, 2016.