Estimation champ moyen pour un système excitateur/inhibiteur

Julien Chevallier [1] & Eva Löcherbach & Guilherme Ost

[1] *Université Grenoble Alpes, France, julien.chevallier1@univ-grenoble-alpes.fr*
[2] *Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, France, eva.locherbach@univ-paris1.fr*
[3] *Université fédérale de Rio de Janeiro, Brésil, guilhermeost@im.ufrj.br*

Résumé. Nous proposons une chaîne de Markov discrète pour modéliser les temps de décharge (*spikes*) de neurones. Le modèle comporte deux populations (excitatrice et inhibitrice) en interaction de type champ moyen dont le graphe d'interaction est un graphe d'Erdős-Rényi de paramètre $p \in [0,1]$. Le principal objectif est d'estimer cette probabilité de connexion p en utilisant uniquement l'observation des *spikes*. La consistance de notre estimateur est prouvée dans la limite où le nombre de neurones et le temps d'observation tendent vers l'infini.

Mots-clés. Graphe d'interaction, Chaîne de Markov, Limite champ moyen

Abstract. A discrete Markov chain is proposed to model the spiking activity of neurons. Our model is structured with two populations (excitatory vs inhibitory) which are coupled via a mean field interaction and an Erdős-Rényi graph with parameter $p \in [0,1]$ as interaction graph. The main goal is to infer this connexion probability via the merely observation of the spiking times. Our estimator is proven to be consistant in the limit where both the number of neurons and the observation time goes to infinity.

Keywords. Interaction graph, Markov chain, Mean field limit

1 Introduction

Soit N un entier positif qui représente le nombre de neurones dans le réseau. Nous allons considérer un modèle où chaque neurone est représenté par un processus à valeurs dans $\{0,1\}$: la valeur 1 encode une décharge et la valeur 0 encode l'absence de décharge. Nous supposons que l'ensemble des neurones $\{1,\dots,N\}$ est partitionné en deux sous-populations $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ (inconnues) qui ont, respectivement, un rôle excitateur et inhibiteur sur le système.

Notons $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ la matrice d'adjacence d'un graphe d'Erdős-Rényi de taille N et de paramètre inconnu $p \in [0,1]$. Plus précisément, les N^2 variables aléatoires θ_{ij} sont i.i.d. de loi Ber(p). Conditionnellement à θ, nous considérons une chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}^N$ dont les probabilités de transition sont données par, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \{0,1\}^N$,

$$\mathbb{P}_\theta(X_t = y | X_{t-1} = x) = \prod_{i=1}^{N} (p_{\theta,i}(x))^{y_i} (1 - p_{\theta,i}(x))^{(1-y_i)}, \tag{1}$$

où $p_{\theta,i}(x)$ représente la probabilité que le i-ème neurone décharge au temps t sachant que le système était dans la configuration x au temps $t-1$. Nous considérons cette probabilité sous la forme suivante:

$$p_{\theta,i}(x) = \mu + \lambda \left(\frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{P}_+} \theta_{ij} x_j + \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{P}_-} \theta_{ij} (1 - x_j) \right), \tag{2}$$

où $0 < \lambda < 1$ et $0 \leq \mu \leq 1 - \lambda$ sont deux paramètres inconnus.

La forme de l'Equation (1) indique que, conditionnellement à $X_{t-1} = x$, les coordonnées de X_t sont indépendantes et de loi $\mathrm{Ber}(p_{\theta,i}(x))$. La forme de l'Equation (2) impose des interactions de type champ moyen avec deux populations: le neurone i ressent la moyenne empirique des neurones $j \in \mathcal{P}_+$ d'un côté et $j \in \mathcal{P}_-$ de l'autre. De plus, comme les θ_{ij} sont positifs, l'influence des neurones $j \in \mathcal{P}_+$ est excitatrice: toutes choses égales par ailleurs, $p_{\theta,i}(x)$ est supérieure dans le cas où le j-ème neurone a déchargé ($x_j = 1$) par rapport au cas sans décharge ($x_j = 0$). Inversement, l'influence des neurones $j \in \mathcal{P}_-$ est inhibitrice.

Enfin, nous considérons que les proportions de neurones excitateurs $r_+^N = |\mathcal{P}_+|/N$ et inhibiteurs $r_-^N = |\mathcal{P}_-|/N$ convergent respectivement vers deux quantités **connues** r_+ et r_- lorsque $N \to \infty$.

Le modèle considéré ici peut être vu comme un analogue à temps discret du modèle de Hawkes linéaire champ moyen étudié dans le papier de Delattre-Fournier (2016). La principale nouveauté de notre approche réside dans le fait que notre modèle considéré une population excitatrice **et** une population inhibitrice. En effet, le modèle de Hawkes linéaire ne permet pas de modéliser une population inhibitrice. De ce fait, une seule population est considérée dans le papier sus-cité.

2 Résultats

Tout d'abord, le fait que $\lambda < 1$ implique l'existence et l'unicité d'une version stationnaire de la chaîne décrite ci-dessus. Ceci est une conséquence assez immédiate de la représentation régénérative rétrograde que possède le modèle.

Soit T un entier positif qui représente le temps d'observation. Supposons que nous observons une trajectoire $X_1, \ldots, X_T$ de la chaîne dans sa version stationnaire. Rappelons que le modèle comporte trois paramètres inconnus: p, μ et λ. Présentons maintenant les trois estimateurs que nous allons étudier.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, notons $\overline{X}_t = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_t(i)$ la moyenne "spatiale" des observations, $Z_t = \sum_{s=1}^t X_s \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des nombres de décharges entre $s = 1$ et $s = t$, et $\overline{Z}_t = N^{-1} \sum_{i=1}^N Z_t(i)$. Le premier estimateur n'est rien d'autre que la moyenne "spatio-temporelle" des observations,

$$\hat{m}_T = \frac{\overline{Z}_T}{T}.$$

Le second se base sur la variance "spatiale" des observations,

$$\hat{v}_T = \frac{(T+1)N}{T^3}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_T(i))^2 - \frac{T}{(T+1)}\left(\overline{Z}_T + \left(\overline{Z}_T\right)^2\right)\right].$$

Le dernier s'intéresse à la variance "temporelle" des observations,

$$\hat{w}_T^N = \frac{N}{T}\sum_{s=1}^{\lfloor T/\Delta \rfloor}\left(\overline{Z}_{s\Delta} - \overline{Z}_{(s-1)\Delta} - \Delta \hat{m}_T^N\right)^2,$$

où Δ est un entier à calibrer.

Une étude fine de la matrice aléatoire θ et de la dynamique du processus permet d'exprimer la limite des trois estimateurs en fonction des paramètres. Plus précisément, il existe une fonction explicite $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (qui dépend de r_+) et une constante K qui ne dépend que de μ, λ, p, r_+ telles que

$$\mathbb{P}\left(\|(\hat{m}_T, \hat{v}_T, \hat{w}_T) - \Psi(\mu, \lambda, p)\| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{T}}\right),$$

où l'on a choisit Δ de l'ordre de $\sqrt{T}$ pour minimiser la borne de droite. Enfin, comme la fonction Ψ est inversible, le triplet $\Psi^{-1}(\hat{m}_T, \hat{v}_T, \hat{w}_T)$ donne un estimateur (faiblement) consistant de nos trois paramètres (μ, λ, p).

Bibliographie

Delattre, S. et Fournier, N. (2016), Statistical inference versus mean field limit for Hawkes processes, *Electronic Journal of Statistics*, 10(1), pp. 1223-1295.